行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

關於Minc及Sathre不等式之研究

計畫編號：NSC 89－2115－M －032－009

執行期間：89 年 08月 01日至90 年 07月 31日

計畫主持人：楊國勝

共同主持人：

處理方式：☑可立即對外提供參考
(請打√) □一年後可對外提供參考
□兩年後可對外提供參考
(必要時，本會得展延發表時限)

執行單位：淡江大學數學系

中華民國 90 年 9 月 3 日

ABSTRACT

In 1993, H. Alzer proved :

If r > 0 and n is a nature number, then the following inequalities :

$$\frac{n}{n+1} \le \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r}{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r} \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \quad \ldots(1)$$

holds. We have proved in this project, the following refinement of (1) :

If r > 0 and n is a nature number, then

$$\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i^r}{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i^r} \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{n}{n+1} \le \left[\frac{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i^r}{\frac{1}{2n+2}\sum_{i=1}^{2n+2} i^r} \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\le \left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r}{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r} \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

holds.

Keywords : Convex function , Hadamard inequality.

摘 要

1993 年，H. Alzer (見參考文獻[1])證明：

若 r>0 , n 爲自然數，則不等式：

$$\frac{n}{n+1} \le \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \quad \ldots(1)$$

成立，我們在本研究中建立比(1)式更細緻的不等式如下：若 r>0, n 爲自然數，則

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i^r \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{n}{n+1} \le \left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i^r \Big/ \frac{1}{2n+2}\sum_{i=1}^{2n+2} i^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\le \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r \right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

關鍵詞：凹(Convex)函數，阿達馬(Hadamard)不等式.

關於 Minc 及 Sathre 不等式之研究

計劃編號：NSC 89-2115-M-032-009
執行期限：89/08/01 ~ 90/07/31
主持人　：楊國勝　淡大數學系教授

一、 計劃緣由與目的

1964 年, H. Minc 及 L. Sathre(見參考文獻[5])證明了一些含 $\sqrt[n]{n!}$ 的不等式，其中之一如下：

若 n 爲自然數，則

$$\frac{n}{n+1} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \quad \dots(1)$$

成立，1988 年, J. M. Martins(見參考文獻[4])證明如下的不等式：

若 r > 0, n 爲自然數，則

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \quad \dots(2)$$

成立，1993 年, H. Alzer(見參考文獻[1])證明了上述兩個不等式之左邊是可以比較大小的，也就是在上述條件下，不等式

$$\frac{n}{n+1} \le \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

$\dots(3)$

成立。

迄今，有關這一方面的研究不多，有關的研究列於參考文獻中，我們擬在本計劃中，嘗試不等式(3)中插入一些式子，也就是找出比不等式(3)更細緻的不等式。

二、 研究成果

我們證明下列不等式

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\le \frac{n}{n+1}$$

$$\le \left[\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i^r \Big/ \frac{1}{2n+2}\sum_{i=1}^{2n+2} i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\le \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^r \Big/ \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} i^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

成立。

參考文獻

[1] H. Alzer，On an inequality of H. Minc and L. Sathre，J. Math. Ana. Appl, 179(1993) 396 – 402.

[2] Ji – Chang Kuang，Some extensions and refinements of Minc – Sathre inequality，Math. Gaz. 83(1999)，123 – 127.

[3] Ji – Chang Kuang，Applied Inequalities，2nd edition，Hunan Education Press，Changsha，China，1993 (Chinese).

[4] J. S. Martins，Arithmetic and geometric means，and application to Lorentz sequence spaces，Math. Nachr，139 (1988) 281 – 288.

[5] H. Minc and L. Sathre，Some inequalities involving $(r!)^{\frac{1}{r}}$. Proc. Edinhurgh Math Soc. 14 (1964/65) 41 – 46.

[6] D. S. Mitrinovi'c，J. E. Pecaric'c and A.M. Fink，Classical and New Inequalitics in Analysis，Kluwer Academic Publishers，Dordrecht / Boston / London，1993.

[7] Feng Qi，An algehraic inequality，RGMIA Reasearch Report Collection 2(1999)，no. 1，71 – 72.